

بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های کنترلی دارای پیش‌بینی‌کننده تأخیر زمانی اسمیت

منصور شیروانی^{*}، مرتضی یونسی^۱، منصوره اسماعیلی^۱

۱- تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی شیمی

۲- تهران، شرکت بین‌المللی توسعه و مهندسی پارس (پیدکو)

پیام‌نگار: Shirvani m@iust.ac.ir

چکیده

تأخیر زمانی یک مسئله مهم در کنترل فرآیندها به شمار می‌رود که باعث کاهش کیفیت کنترل و ناپایداری سیستم‌های کنترلی می‌شود. در سال ۱۹۵۷ اسمیت روشی را برای خارج نمودن تأخیر زمانی از حلقه کنترل ارائه نمود که در ابتدا بسیار مورد توجه قرار گرفت. در این مقاله سعی شده است با استفاده از تابع انتقال حلقه باز سیستم‌های کنترلی دارای جبران‌کننده تأخیر زمانی اسمیت، رفتار دینامیکی این گونه سیستم‌ها مورد بررسی قرار گیرد و حالت‌هایی که منجر به ایجاد حالت دینامیکی فاز محدود یا حالت دینامیکی فاز نامحدود می‌شوند، بررسی شوند تا بتوان مسائل پایداری یا ناپایداری اینگونه سیستم‌ها را بهتر مشخص کرد. به عبارت دیگر در این مقاله بیان می‌شود که سیستم‌های کنترلی دارای تأخیر زمانی نیز می‌توانند تحت شرایطی که بهره (Gain) قسمت بدون تأخیر زمانی بزرگتر از بهره قسمت دارای تأخیر زمانی باشد دارای رفتار مینیمم فاز باشند.

کلمات کلیدی: جبران‌گر تأخیر زمانی اسمیت، رفتار دینامیکی فاز محدود، رفتار دینامیکی فاز نامحدود، تأخیر زمانی

۱- مقدمه

مشکلات کنترل فرآیندهای دارای تأخیر زمانی به دلیل وجود پارامتر تأخیر زمانی و تأثیری که بر ناپایداری سیستم می‌گذارد همواره مطرح بوده است. اولین بار اسمیت [۱] روشی را جهت جبران اثرات تأخیر زمانی ارائه کرد که به روش اسمیت معروف شده است. در این روش، برای حذف اثرات تأخیر زمانی، نیاز به شناخت کامل تابع انتقال فرآیند می‌باشد و این روش نسبت به خطای مدل بسیار حساس است. یعنی روش اسمیت در مقابل تغییرات پارامترهای فرآیند و ایجاد عدم تطابق بین مدل و فرآیند، بسیار حساس است و در چنین حالتی به سرعت

ناپایدار می‌شود. محققان زیادی در طول سه دهه اخیر در جهت بهبود مدل پیش‌بینی‌کننده اسمیت قدم برداشته اند. برای بررسی مسئله پایداری سیستم‌های کنترلی دارای پیش‌بینی‌کننده اسمیت، بررسی رفتار دینامیکی این سیستم‌ها مهم است. اگر تابع انتقال حلقه باز سیستم‌های کنترلی دارای پیش‌بینی‌کننده اسمیت از دو جمله که یکی دارای تأخیر زمانی و دیگری فاقد تأخیر زمانی است تشکیل شده باشد در بررسی رفتار دینامیکی این توابع می‌توان ثابت کرد که رفتار دینامیکی سیستم، تابع ترمی است که از بهره بالاتری نسبت به ترم دیگر برخوردار است (البته ترم دارای تأخیر زمانی برآیند دو ترم دارای

در حوزه پاسخ فرکانسی رفتار دینامیکی اینگونه سیستم‌های کنترلی دارای ویژگی‌های بخصوصی است. مدل دینامیکی تابع انتقال اینگونه سیستم‌ها را می‌توان بصورت حاصل جمع دو تابع انتقال گویا^۱ نشان داد. در این گونه مدل‌ها، در حوزه پاسخ فرکانسی پارامتر تأخیر زمانی اثرات چندگانه و پیچیده‌ای را بر روی رفتار دینامیکی مدل می‌گذارد. بخاطر ظاهر شدن رزونانسهای پرپودیک که منجر به حالت فزایی نامحدود^۲ می‌شود مسأله تابع انتقالهای مبهم^۳ که حاوی جمله تأخیر زمانی است بسیار پیچیده تر از مسائل مربوط به تابع انتقالهای گویا می‌باشد. بطور کلی نکات مربوط به پاسخ پله‌ای و پاسخ فرکانسی سیستم‌های دارای تأخیر زمانی با ساختار تابع انتقالی مبهم به شرح زیر قابل دسته بندی است [۵و۶].

۱- در برخی از این سیستمها تغییر ناگهانی شیب دیده می‌شود. در برخی نیز شیب تغییر علامت می‌دهد و در مواردی تغییر ناگهانی شیب دیده نمی‌شود.

۲- در برخی از این سیستمها پسی فاز بزرگی در فرکانسهای بالا دیده می‌شود که نامحدودی فاز را نشان می‌دهد. این نامحدودی فاز می‌تواند همراه با نوسانات باشد یا نباشد.

۳- برخی از اینگونه سیستمها در فرکانسهای بالا رفتار فاز نوسانی محدود را نشان می‌دهند.

۴- در سیستمهای فاز محدود و یا نامحدود، رفتار محدود یا نامحدود فاز در فرکانس مشخصی، تبدیل می‌یابد.

۵- در طی مراحل طراحی کنترل کننده برای اینگونه سیستمها عبارت تأخیر زمانی مستقیماً از مدل استنباط نمی‌شود لذا در روشهای مورد استفاده برای طراحی کنترل کننده این قبیل سیستمها لازمست که قسمت محدود یا نامحدود به صورت صریح مشخص شده باشد.

معادله (۵) یک مدل عمومی ساده شده برای توضیح رفتار دینامیکی اینگونه سیستمهاست. تابع انتقال بیان شده در معادله (۵) برای بررسی مشخصه‌های خاص از اینگونه سیستمها مورداستفاده قرار می‌گیرد.

$$G(s) = g_a(s) + g_b(s) \quad (5)$$

$$g_a = \frac{K_1}{Q_a(s)}, \quad g_b = \frac{K_2 e^{-s\tau_1}}{Q_b(s)} \quad (6)$$

1. Rational
2. Non-limited Phase
3. Irrational

تأخیر زمانی می‌باشد). به عنوان مثال اگر بهره جمله فاقد عبارت تأخیر زمانی از بهره جمله دارای تأخیر زمانی در همه فرکانسها بزرگتر باشد، در این صورت رفتار دینامیکی تابع انتقال حلقه باز فرآیند علی‌رغم وجود عبارت تأخیر زمانی در آن حالت، رفتار فاز غیر مینیمم نداشته بلکه در یک زاویه فاز ثابت محدود شده و با پیروی مشخص نوسان می‌کند.

۲- جبران کننده تأخیر زمانی اسمیت

شکل (۱) ساختار پیش‌بینی کننده اسمیت را نشان می‌دهد. پاسخ این سیستم به ازای تغییر پله‌ای مقدار مقرر به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{Y_p}{R} = \frac{G_c G_p e^{-s\tau_p}}{1 + G_c G_m + G_c [G_p e^{-s\tau_p} + G_m e^{-s\tau_m}]} \quad (1)$$

تابع انتقال حلقه باز سیستم کنترل پیش‌گویی کننده اسمیت از دو جمله تشکیل شده است. یک اختلاف اساسی در معادله مشخصه سیستمهای کنترل پیش‌گویی کننده اسمیت در مقایسه با حلقه‌های کنترل ساده وجود دارد و آن اینست که در اینگونه سیستمها تابع انتقال حلقه باز سیستم حاوی دو تابع انتقال می‌باشد که این دو در کنار هم تشکیل تابع انتقال حلقه باز سیستم را میدهند، به طوری که:

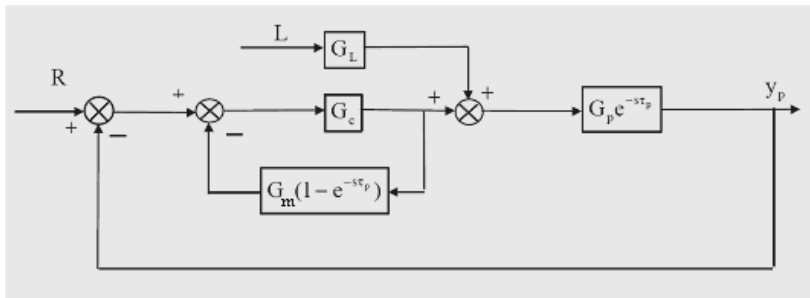
$$G_{O.L} = G_1(s) + G_2(s) \quad (2)$$

که $G_1(s)$ و $G_2(s)$ عبارتند از:

$$G_1(s) = G_c G_m \quad (3)$$

$$G_2 = G_c (G_p e^{-s\tau_p} - G_m e^{-s\tau_m}) \quad (4)$$

لذا دیده میشود که برای وارد شدن در بحث مسئله پایداری سیستمهای کنترل پیش‌بینی کننده اسمیت عملاً باید به بررسی رفتار دینامیکی توابع انتقال حاوی دو تابع موازی پرداخته شود. در رابطه با رفتار دینامیکی اینگونه توابع انتقال بررسیهای جامع در حوزه پاسخ فرکانسی انجام شده است [۳و۴].



شکل ۱- ساختار پیش‌بینی‌کننده اسمیت

(۸) رابطه (۵) در واقع همان رابطه (۲) می باشد که به صورت دیگری

نوشته شده است.

در عین حال به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که حالت‌های تلفیقی مختلفی از تبدیل رفتار دینامیکی فازی محدود به رفتار دینامیکی فازی نامحدود یا بالعکس در دو یا چند باند فرکانسی متوالی قابل پیش‌بینی است. بدین معنی که شرط برقراری رفتارهای دوگانه در روابط (۷) و (۸) ممکن است در فرکانس خاصی از یک حالت به حالت دیگر تبدیل شود.

بدین ترتیب رفتارهایی که تلفیقی از دو رفتار فوق‌الذکر میباشند قابل پیش‌بینی است. از روابط فوق که برای تشکیل هر حالتی از رفتار دینامیکی اینگونه مدلها ارائه شده است می‌توان در تنظیم پارامترهای کنترلر پیش‌گویی‌کننده اسمیت استفاده کرد. شناخت این رفتارها برای طراحی مناسب سیستم کنترلی مفید است

۳- پاسخ فرکانسی [۲و۳]

برای بررسی رفتار دینامیکی مدل پیش‌بینی‌کننده اسمیت، می‌توان از معادلات بهره و فاز که در حالت کلی بدست آمده‌اند استفاده کرد. $Q_a(s)$ و $Q_b(s)$ توابعی از s هستند.

$$\left|G(j\omega)\right| = \sqrt{(R_a + R_b)^2 + (I_a + I_b)^2} \quad (9)$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{(I_a + I_b)}{(R_a + R_b)} \quad (10)$$

در معادلات فوق R_b, R_a مولفه‌های حقیقی و I_b, I_a مولفه‌های

قبل از وارد شدن به بحث بررسی رفتار دینامیکی پیش‌بینی‌کننده اسمیت، مرور ویژگیهای زیر در نمودارهای پاسخ فرکانسی اینگونه مدلها مفید خواهد بود:

الف - به طور کلی در بین دو جمله مستقل (مثلا تابع انتقال‌های $G_1(s)$ و $G_2(s)$) همواره نوسانات پریودیک دامنه و فاز^۱ مدل، حول نسبت دامنه و فاز تابع انتقالی از مدل اتفاق می‌افتد که دارای مقدار نسبت دامنه بیشتری است.

ب - در مورد فاز، در باند محدودی از فرکانس مثل $\omega_1 < \omega < \omega_2$ ، ممکن است دو حالت مختلف رفتار دینامیکی فاز محدود^۲ و رفتار دینامیکی فاز نامحدود^۳ در رفتار دینامیکی مدل پیش‌آید.

- حالت رفتار دینامیکی فاز محدود - در این حالت شرایط زیر

بین دامنه و فاز دو جزء مجزای تابع انتقال مدل برقرار خواهد بود.

$$\frac{d|\angle G_1|}{d\omega} < \frac{d|\angle G_2|}{d\omega}, \quad |G_1| < |G_2|, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (7)$$

- حالت رفتار دینامیکی فاز نامحدود - در این حالت ارتباط بین

بهره و فاز اجزای مدل چنین خواهد شد.

$$\frac{d|\angle G_1|}{d\omega} < \frac{d|\angle G_2|}{d\omega}, \quad |G_1| \geq |G_2|, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2$$

1. Amplitude Ratio (AR) and Phase
2. Limited Delay Resonating Phase behavior
3. Unlimited Delay Resonating Phase behavior

$$(12)$$

که در آن،

$$|a| = |g_a(j\omega)| = \frac{|K_1|}{\sqrt{V_a^2 + U_a^2}}; \alpha = -\omega\tau_1 - \tan^{-1}\left(\frac{V_a}{U_a}\right)$$

$$|b| = |g_b(j\omega)| = \frac{|K_2|}{\sqrt{V_b^2 + U_b^2}}; \beta = -\omega\tau_2 - \tan^{-1}\left(\frac{V_b}{U_b}\right)$$

$$\delta = \beta - \alpha = \omega(\tau_1 - \tau_2) + \tan^{-1}\left(\frac{V_a}{U_a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{V_b}{U_b}\right)$$

$$(13)$$

معادلات (12) و (13) برای هر شکلی از $Q_a(s)$ و $Q_b(s)$ بهره و فاز مدل را مشخص می‌کنند.

۴- مشخصات بهره [۲,۴]

وجود رزونانس در بهره مدل، به خوبی از معادله (12) قابل استنباط است. در فرکانسهای پائین (که ω به سمت صفر میل می‌کند)، بهره از رابطه زیر بدست می‌آید.

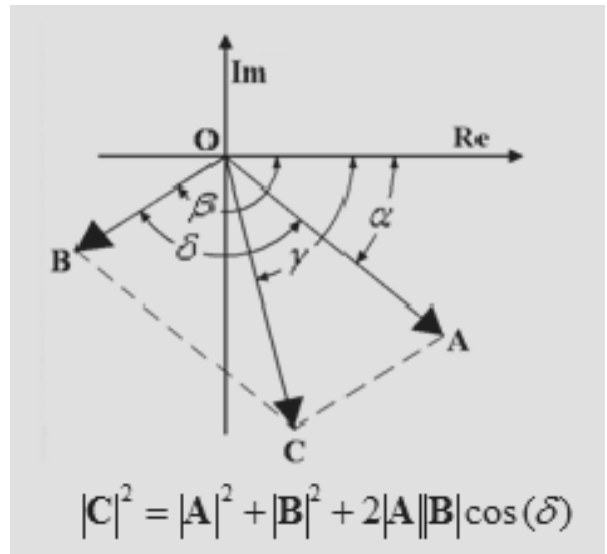
$$|c| = |K_1 + k_2| \quad (14)$$

باتوجه به مقادیر حداکثر و حداقلی که جمله کسینوس در معادله (12) می‌تواند اختیار کند دو حد بالا و پائین بهره را می‌توان به صورت زیر گزارش کرد:

$$\begin{aligned} E_u &= \max |c| = |a| + |b| \\ E_l &= \min |c| = |a| - |b| \end{aligned} \quad (15)$$

در فرکانسهای بالا حدود بهره به سمت دو مجانب خطی جداگانه میل می‌کنند. عبارت جبری این خطوط مجانب با صرف نظر کردن از جمله‌های کوچکتر معادله بهره در فرکانسهای بالا بدست می‌آید. برای یک مدل $G_{m,n}(s)$ به صورت:

مختلط $g_a(j\omega)$ ، $g_b(j\omega)$ هستند. شکل (۲) نمایش برداری رابطه (۵) را نشان می‌دهد. در این شکل بردارهای **A** و **B** و **C** به ترتیب معرف $g_a(j\omega)$ ، $g_b(j\omega)$ و $G(j\omega)$ می‌باشند.



شکل ۲- نمایش برداری مدل رابطه (۳-۴) و اجزای آن در محورهای مختصات مختلط

از بهره و فاز بردارهای **A** و **B**، بهره و فاز بردار **C** بدست می‌آید. $G(j\omega)$ ممکن است به صورت زیر نوشته شود.

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{(U_a + jV_a)} + \frac{K_2 e^{-\tau_1 j\omega}}{(U_b + jV_b)} \quad (11)$$

که U_a, U_b قسمت‌های حقیقی و V_a, V_b قسمت‌های مختلط $Q_a(j\omega)$ و $Q_b(j\omega)$ را نشان می‌دهند.

بنابراین بهره و فاز $G(j\omega)$ مستقیماً از معادلات (۹) و (۱۰) و شکل ۲ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} |c| = |G(j\omega)| &= \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + \frac{2K_1 K_2}{|K_1||K_2|} |a||b| \cos(\beta - \alpha)} \\ \angle c = \angle G(j\omega) &= \tan^{-1} \frac{\left(\frac{K_1}{|K_1|}\right) |a| \sin\alpha + \left(\frac{K_2}{|K_2|}\right) |b| \sin\beta}{\left(\frac{K_1}{|K_1|}\right) |a| \cos\alpha + \left(\frac{K_2}{|K_2|}\right) |b| \cos\beta} \end{aligned}$$

$$Q_{bn}(s) = (T_1 s)^n + c_{b1} (T_1 s)^{n-1} + \dots + 1 \quad (21)$$

فاصله $C_{b1}, C_{b2}, C_{a1}, C_{a2}$ ثابت‌های چند جمله ایها هستند. فاصله عمودی بین دو مجانب از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta_{m,n} = M_{m,n} - N_{m,n} \quad (22)$$

شکل (۳) حدود بهره را برای یک مدل $G_{1,1}(s)$ نشان می‌دهد.

$$G_1(s) = \frac{0.5}{0.2s+1} \quad G_2(s) = \frac{0.3}{0.3s+1} e^{(0.1s)}$$

بهره مدل همواره در حوالی بخشی از G که بهره بزرگتری دارد نوسان می‌کند.

۵- بررسی سطح پیچیده^۱ و مشخصات فازی

شکل‌های (۴) و (۵) دو حالت اولیه و مهم از رفتار فازی تابع تبدیلیهای مبهم را نشان میدهند که در آنها رفتار مدل حین چرخش بردارهای a و b تغییر فرکانس نمایش داده می‌شوند. در این شکلها فرض بر این است که بردار a آهسته‌تر از بردار b دوران می‌کند. در شکل ۴ اندازه بردار a بزرگتر از بردار b و در شکل (۵) اندازه بردار a کوچکتر از بردار b است.

$$G_{m,n}(s) = \frac{K_1}{Q_m(s)} + \frac{K_2}{Q_n(s)}$$

که در آن جمله‌های مستقل مدل بترتیب از درجه m و n می‌باشند، در فرکانسهای بالا رابطه بهره بصورت زیر ساده خواهد شد.

$$|c_{m,n}| = \sqrt{\frac{K_1^2}{\omega^{2m} T_1^{2m}} + \frac{K_2^2}{\omega^{2n} T_2^{2n}} + \frac{2K_1 K_2}{\omega^m T_1^m \omega^n T_2^n} \cos[\omega(\tau_1 - \tau_2)]} \quad (16)$$

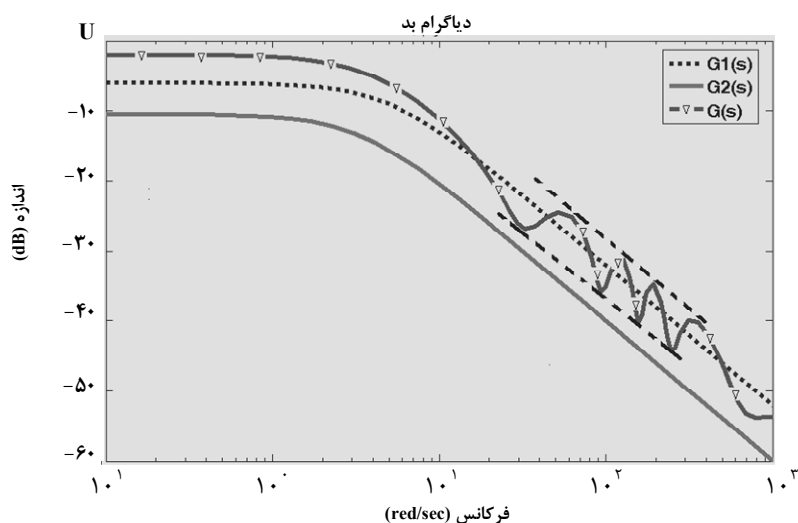
$$N_{m,n} \leq |c_{m,n}| \leq M_{m,n} \quad (17)$$

$$N_{m,n} = \min \left[\left| \frac{K_1}{(T_1 \omega)^m} - \frac{K_2}{(T_2 \omega)^n} \right|, \left| \frac{K_1}{(T_1 \omega)^m} + \frac{K_2}{(T_2 \omega)^n} \right| \right] \quad (18)$$

$$M_{m,n} = \max \left[\left| \frac{K_1}{(T_1 \omega)^m} - \frac{K_2}{(T_2 \omega)^n} \right|, \left| \frac{K_1}{(T_1 \omega)^m} + \frac{K_2}{(T_2 \omega)^n} \right| \right] \quad (19)$$

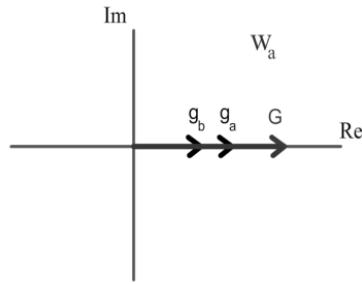
در معادلات فوق T_1, T_2 پارامترهایی از $g_{am}(s), g_{bn}(s)$ هستند که در آن چند جمله‌ای‌های $Q_{am}(s), Q_{bn}(s)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$Q_{am}(s) = (T_1 s)^m + c_{a1} (T_1 s)^{m-1} + \dots + 1 \quad (20)$$

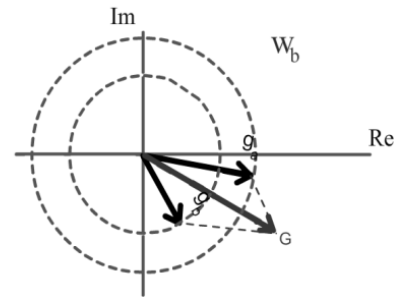


شکل ۳- حد بالا و پایین بهره برای مدل $G_{1,1}(s)$

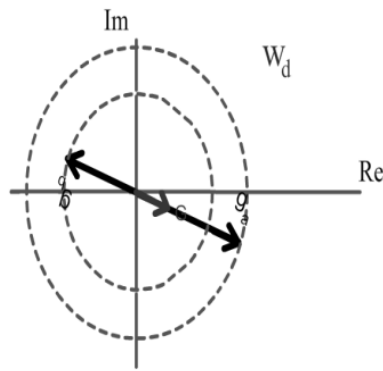
$$\frac{|a|}{|b|} > 1$$



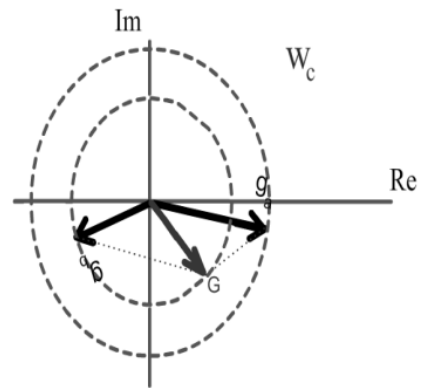
$$\frac{|a|}{|b|} > 1$$



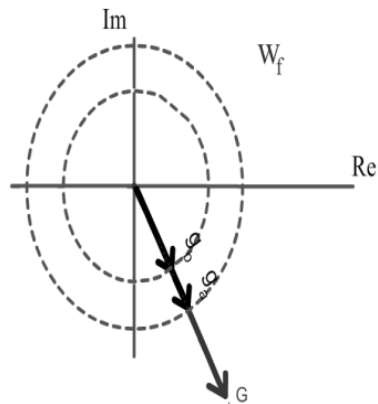
$$\frac{|a|}{|b|} > 1$$



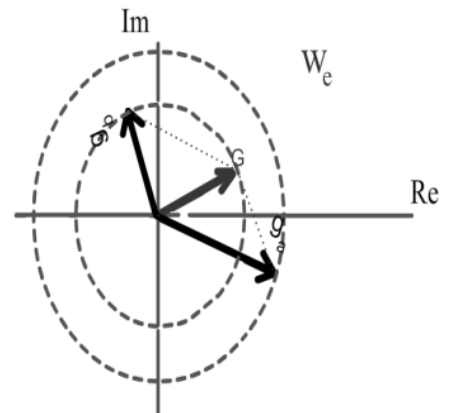
$$\frac{|a|}{|b|} > 1$$



$$\frac{|a|}{|b|} > 1$$

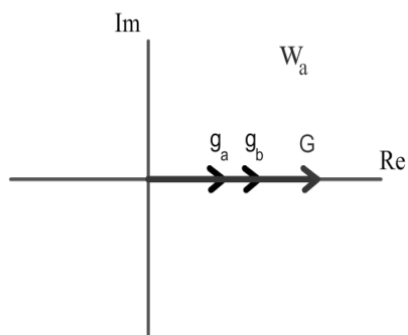


$$\frac{|a|}{|b|} > 1$$

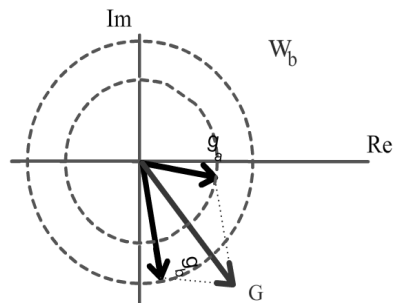


شکل ۴- نمایش برداری بردارهای a و b برای حالت $\frac{|a|}{|b|} > 1$ ، حالت $|x|$

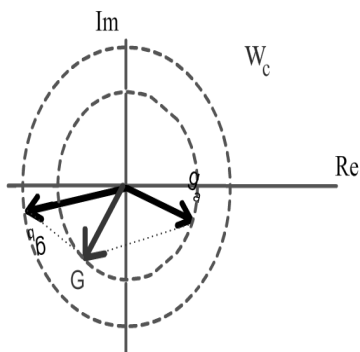
$$\frac{|a|}{|b|} < 1$$



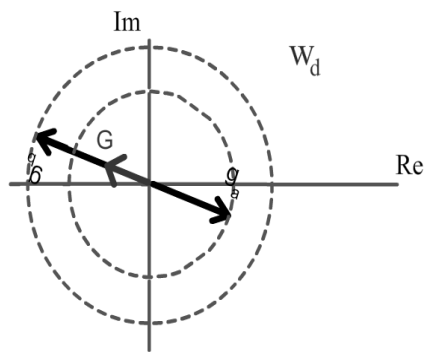
$$\frac{|a|}{|b|} < 1$$



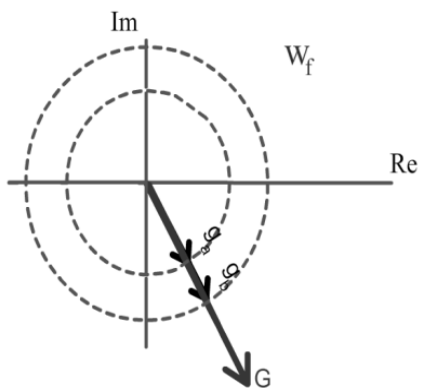
$$\frac{|a|}{|b|} < 1$$



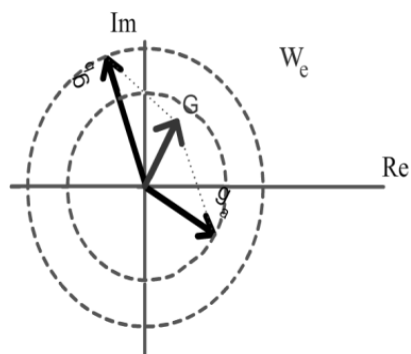
$$\frac{|a|}{|b|} < 1$$



$$\frac{|a|}{|b|} < 1$$



$$\frac{|a|}{|b|} < 1$$



شکل ۵- نمایش برداری بردارهای a و b برای حالت $\frac{|a|}{|b|} > 1$ ، حالت [v]

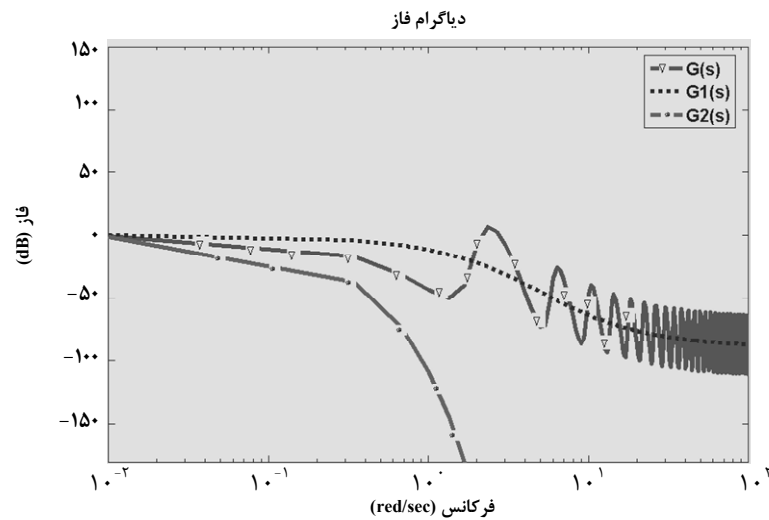
الف - حالتی که جمله بدون تأخیر زمانی، جمله بهره برتر است.

$$G_1(s) = \frac{0.5}{0.2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{0.3}{0.3s+1} e^{-1.6s}$$

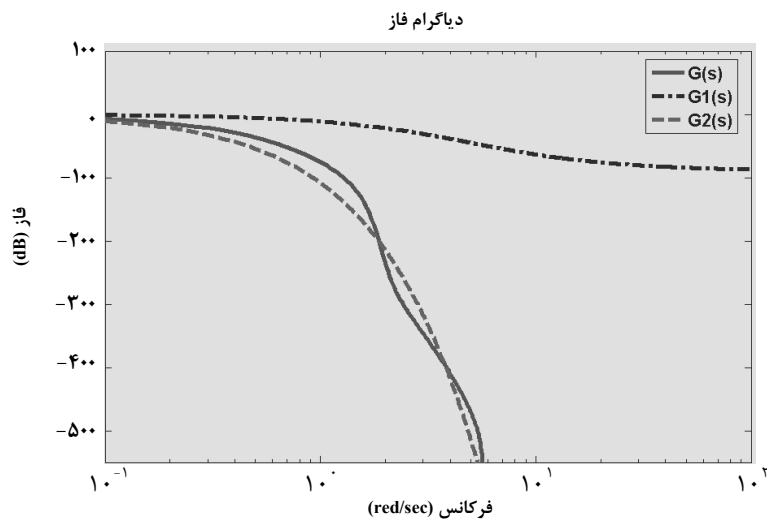
ب - حالتی که جمله دارای تأخیر زمانی، جمله بهره برتر است.

$$G_1(s) = \frac{0.3}{0.2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{0.5}{0.2s+1} e^{-1.6s}$$

تفاوت مابین دو حالت فوق (حالت [x] و حالت [y]) تنها در طول (بهره) بردارهای a و b می‌باشد. در موقعیت ω_d که دو بردار a و b در جهت مخالف یکدیگر قرار گرفته‌اند بهره مدل، می‌نیمم مقدار خود را دارد و در موقعیت ω_f مقدار ماکزیمم بهره ظاهر میگردد. در مورد شرایط مربوط به شکل (۴) همانگونه که در شکل (۶) دیده می‌شود با افزایش ω بردار برآیند حول بردار a نوسان می‌کند ولی در شرایط مربوط به شکل ۵ با افزایش ω مطابق شکل (۷) بردار برآیند حول بردار b نوسان می‌کند. شکل‌های ۶ و ۷ برای مدلهای زیر ترسیم شده‌اند.



شکل ۶- پاسخ فرکانسی دامنه مدل برای حالت (الف)



شکل ۷- پاسخ فرکانسی مدل برای حالت (ب)

می‌کند. در این حالت، مقادیر $G_1(s)$ و $G_2(s)$ برای شکل (۸) بصورت زیر انتخاب شده‌اند:

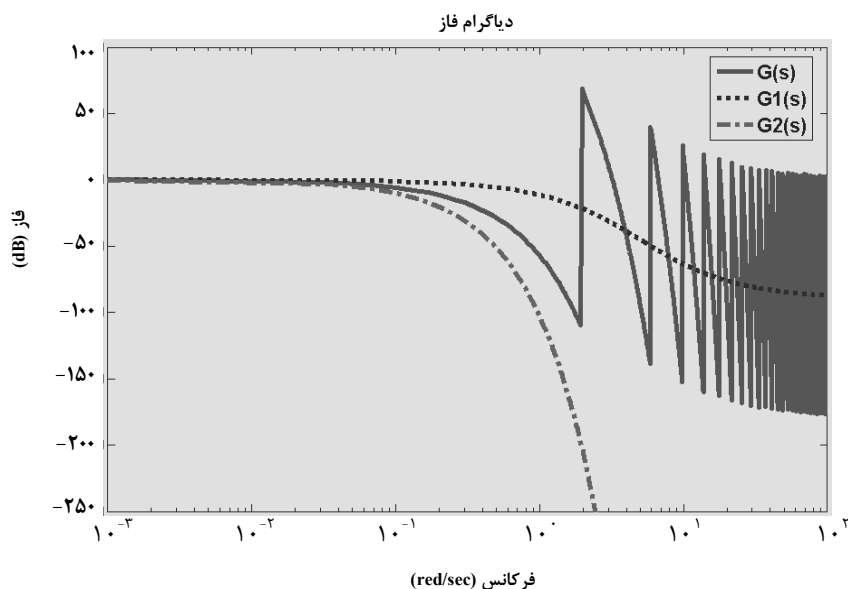
$$G_1(s) = \frac{0.3}{0.2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{0.3}{0.2s+1} e^{-1.6s}$$

همچنین، امکان ظاهر شدن حالت‌های جدید زاویه فاز قابل پیش‌بینی است. این حالت‌های جدید در حقیقت تلفیقی از دو حالت اصلی قبلی می‌باشند. در شکل‌های (۹) و (۱۰) نمودار فاز برای شرایطی نشان داده شده‌است که در آنها به علت تغییر در وضعیت برتر بودن بهره جمله اول نسبت به جمله دوم و یا برعکس، برتر بودن بهره جمله دوم نسبت به جمله اول، نمودار فاز ابتدا از رفتار حالت فاز محدود تبعیت می‌کند و سپس رفتار آن تغییر کرده و حالت فاز نامحدود را به خود می‌گیرد و یا بر عکس ابتدا از رفتار فاز نامحدود شروع می‌کند و سپس به رفتار فاز محدود می‌رسد.

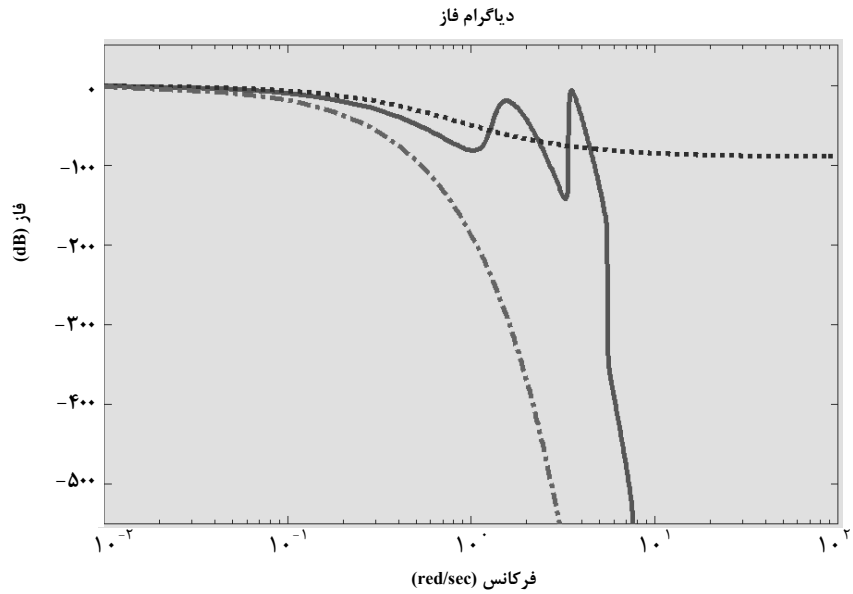
از شکل‌های ۶ و ۷ می‌توان فهمید که نقاط ماکزیمم و مینیمم بهره مدل در حالت الف) در اطراف نمودار بهره $G_1(s)$ و در حالت ب) در اطراف نمودار بهره $G_2(s)$ قرار گرفته است. همچنین می‌توان ثابت کرد که نمودار فاز مدل نیز از نمودار فاز جمله‌ای که بهره برتر دارد تبعیت می‌کند. این موضوع از طریق دنبال کردن مسیر بردارها در شکل‌های ۶ و ۷ نیز قابل درک است. اثبات این موضوع در ضمیمه مقاله آمده است.

بنابراین اگر فرض کنیم که $G_1(s)$ تابع انتقالی با رفتار فاز مینیمم و $G_2(s)$ تابع انتقالی با رفتار فاز غیر مینیمم باشد، در حالت اول رفتار فازی محدود و در حالت دوم رفتار فازی نامحدود خواهد داشت. یعنی در حالت اول سیستم کنترل سریعتر از حالت دوم ناپایدار می‌گردد. مسلم است که از دیدگاه کنترلی رفتار فاز محدود مطلوب‌تر از رفتار فاز نامحدود می‌باشد.

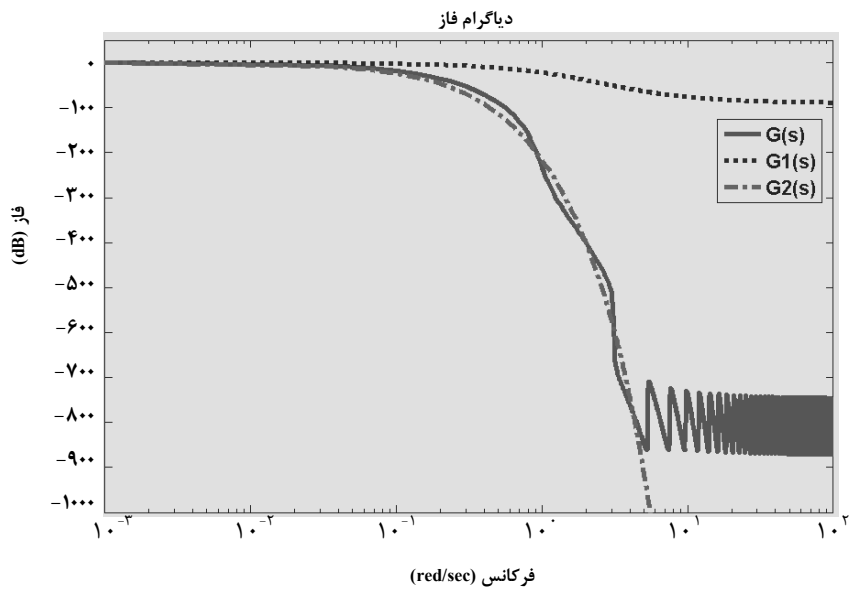
علاوه بر دو حالت فوق، حالت خاص دیگری نیز قابل تصور است. در این حالت خاص، $\omega_2 > \omega > \omega_1$ ، $|a| = |b|$ در نظر گرفته می‌شود. نمودار پاسخ فرکانسی این حالت در شکل ۸ مشاهده می‌شود. در این حالت شبیه به حالت اول، بردار برآیند حول بردار a نوسان



شکل ۸- دیگرام‌های پاسخ فرکانسی مدل برای حالتی که بهره‌های اجزای مدل در محدوده فرکانسی مشخصی یکسان باشند



شکل ۹- نمودار فاز برای مدلی که از حالت فاز محدود به حالت فاز نامحدود تغییر رفتار داده است



شکل ۱۰- پاسخ فرکانسی برای تغییر رفتار مدل از حالت فاز نامحدود به حالت فاز محدود

در شکل ۱۰ مقادیر $G_1(s)$ و $G_2(s)$ عبارتند از:

در شکل (۹) مقادیر $G_1(s)$ و $G_2(s)$ عبارتند از:

$$G_1(s) = \frac{0.3}{0.4s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{0.8}{1.2s + 1} e^{(-2.9s)}, \quad G_1(s) = \frac{0.8}{1.2s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{0.3}{0.4s + 1} e^{(-2.9s)}$$

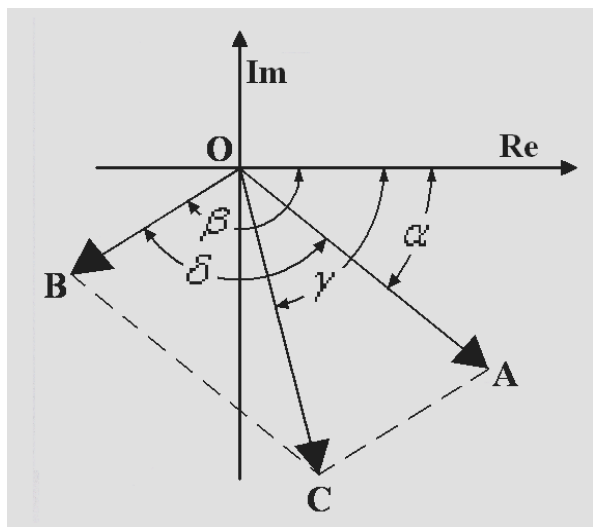
که با ایجاد حالت مینیمم فاز سیستم‌های کنترلی می‌توان در کیفیت کنترل سیستم‌های تأخیر زمانی، بهبود ایجاد کرد. از مباحث مطرح شده در این مقاله می‌توان این نتیجه را گرفت که اگر مقدار بهره جمله بدون تأخیر زمانی بزرگتر از بهره جمله دارای تأخیر زمانی باشد، می‌توانیم از خاصیت ایجاد شرایط مینیمم فاز بودن استفاده کنیم و باعث بهبود کیفیت کنترل و پایداری بهتر سیستم کنترل شویم. مزیت این کار در این است که باعث می‌شویم بردار برآیند جمله‌های دارای تأخیر زمانی از جمله بدون تأخیر زمانی پیروی کند و نمودار فاز آن دارای رفتار فاز محدود شود که البته این عمل، موجب بهبود پایداری سیستم می‌گردد.

ضمیمه

تابع irrational معادله (A-1) را در نظر بگیرید.

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = G_1(s) + G_2'(s) e^{-sT_d} \quad (A-1)$$

اگر در صفحه محورهای مختصات مختلط بردار $G(j\omega)$ را با C و بردارهای $G_1(j\omega)$ و $G_2(j\omega)$ را به ترتیب با A و B نمایش دهیم در این صورت وضعیت آنها نسبت به یکدیگر مطابق شکل (A-1) خواهد بود.



شکل A-1 - نمودار برداری معادله (A-1)

بردار B به دلیل این که دارای عبارت تأخیر زمانی است با سرعت

در کل، در مورد حالتها و رفتارهای تلفیقی باید توجه کرد که تغییر حالت از وضعیت "الف" به وضعیت "ب" یا برعکس از وضعیت "ب" به وضعیت "الف"، ممکن است در اثر تغییر در نسبت بهره‌ها، یعنی تبدیل $|A| > |B|$ به $|a| < |b|$ یا در اثر تغییر در نسبت سرعت دوران بردارها یعنی تبدیل $\frac{d\angle a}{d\omega} > \frac{d\angle b}{d\omega}$ به $\frac{d\angle a}{d\omega} < \frac{d\angle b}{d\omega}$ حادث شود. حالت‌های تلفیقی را که در اثر بهره‌ها باشد می‌توان با نمایه‌هایی از قبیل $[ab]g$ و $[ba]g$ و اگر در اثر تغییر وضعیت فازها حادث شده باشد با نمایه‌های $[ab]p$ و $[ba]p$ نمایش داد. اما باید توجه داشت که به دلیل تقارن، تبدیل وضعیت چه در اثر بهره‌ها باشد و چه در اثر فاز نتیجه یکسانی دارد و همواره دو حالت تلفیقی $[ba]$ و $[ab]$ قابل تصور است.

بطور کلی اگر دقیقاً به رفتار بردارها در حین دوران و تغییر طول آنها در اشکال ۴ و ۵ توجه شود معلوم می‌گردد که این دو حالت تلفیقی در اثر تقاطع بهره‌های $G_1(s)$ و $G_2(s)$ حاصل می‌شوند، بدین معنی که هرگاه در فرکانس خاصی تقاطعی بین بهره‌های اجزای تشکیل‌دهنده یک تابع انتقال مبهم اتفاق بیافتد در دو سمت فرکانس تقاطع بهره‌ها، رفتار پاسخ فرکانسی مدل متفاوت خواهد بود. این اصل را بهره برتر در رفتار دینامیکی توابع تبدیل مبهم مینامیم. به عبارت دیگر رفتار پاسخ فرکانسی یک تابع انتقال مبهم در هر بازه فرکانسی بخصوصی مثل $\omega_1 > \omega > \omega_2$ از رفتار دینامیکی جمله‌ای که دارای بهره برتر در آن بازه فرکانسی می‌باشد تبعیت می‌نماید و این موضوع هم در مورد نمودار بهره تابع انتقال و هم در مورد نمودار فاز صادق است. برای اثبات این موضوع لازم و کافیسست که تبعیت از جمله دارای بهره برتر، هم در مورد بهره و هم در مورد فاز، اثبات شود. مطالبی که در مورد اشکال (۴) و (۵) توضیح داده شد برای اثبات تبعیت نمودار بهره مدل از بهره جمله دارای بهره برتر کفایت می‌کند. اما در مورد تبعیت نمودار فاز مدل از نمودار فاز جمله بهره برتر، در ضمیمه اثبات این موضوع ارائه شده است.

۶- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله حالت‌های مختلفی از رفتار دینامیکی سیستم‌های کنترلی دارای پیش‌بینی‌کننده اسمیت مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد

$$\frac{|B|(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)}{|A|(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + |B|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)} \leq \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\frac{|B|\sin(\beta - \alpha)}{|A| + |B|\cos(\beta - \alpha)} \leq \frac{\sin(\frac{\beta - \alpha}{2})}{\cos(\frac{\beta - \alpha}{2})} \quad (A-5)$$

که معادل است با:

$$\frac{2|B|\sin(\frac{\beta - \alpha}{2})\cos(\frac{\beta - \alpha}{2})}{|A| + |B|\cos(\beta - \alpha)} \leq \frac{\sin(\frac{\beta - \alpha}{2})}{\cos(\frac{\beta - \alpha}{2})}$$

پس از مرتب سازی، رابطه (A-6) حاصل می‌گردد.

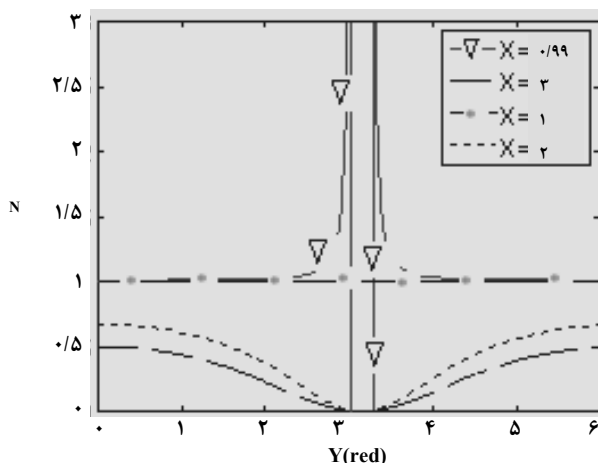
$$\frac{2\cos^2(\frac{\beta - \alpha}{2})}{[\frac{|A|}{|B|} + \cos(\beta - \alpha)]} \leq 1 \quad (A-6)$$

رابطه (A-6) را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\frac{1 + \cos(\beta - \alpha)}{[\frac{|A|}{|B|} + \cos(\beta - \alpha)]} < 1 \quad (A-7)$$

نامساوی (A-7) همواره برقرار است، زیرا فرض اولیه مبتنی بر $|A| \geq |B|$ بوده است.

دیاگرام فاز



شکل A-2- تغییرات $Z = [1 + \cos(\beta - \alpha)] / [|\frac{A}{B}| + \cos(\beta - \alpha)]$

در مقابل $Y = (\beta - \alpha)$ به ازای مقادیر مختلف $X = |A|/|B|$

بیشتری نسبت به بردار A در چرخش است. لذا β همواره بزرگتر از α است. می‌توان ثابت کرد که در صورتیکه در باند فرکانس خصوصی مثل $\omega_1 < \omega < \omega_2$ اندازه برداری A از B بزرگتر یا مساوی آن باشد بردار برآیند، C ، از بردار A تبعیت خواهد کرد. همچنین اگر طول بردار B از طول بردار A بیشتر باشد بردار C از بردار B تبعیت خواهد کرد. البته، تبعیت بردار C از هر یک از بردارهای A و B هم در مورد زاویه و هم در مورد بهره صادق خواهد بود. بنابراین، اگر بردار A دارای رفتار دینامیکی بدون تأخیر زمانی باشد بردار برآیند نیز رفتار دینامیکی مشابه آن خواهد داشت و بالعکس. برای اثبات این مطلب کافی است که درستی رابطه (A-2) را نشان دهیم.

$$|\gamma - \alpha| \leq \frac{|\delta|}{2} = \left| \frac{(\beta - \alpha)}{2} \right| \quad (A-2)$$

اثبات این رابطه به مفهوم آن است که بردار برآیند همواره در حول و حوش بردار A حرکت می‌کند لذا در حوزه فرکانسی تابع رفتار دینامیکی آن می‌باشد. چون بنا به فرض β همواره بزرگتر از α می‌باشد می‌توان از رابطه (A-2) به رابطه (A-3) رسید.

$$\operatorname{tg}(\gamma - \alpha) \leq \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}(\gamma) - \operatorname{tg}(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}(\gamma)\operatorname{tg}(\alpha)} \leq \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (A-3)$$

با جایگذاری:

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{|A|\sin\alpha + |B|\sin\beta}{|A|\cos\alpha + |B|\cos\beta}$$

در رابطه (A-3) داریم:

$$\frac{|A|\sin\alpha + |B|\sin\beta}{|A|\cos\alpha + |B|\cos\beta} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \leq \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$1 + \frac{|A|\sin\alpha + |B|\sin\beta}{|A|\cos\alpha + |B|\cos\beta} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (A-4)$$

بعد از مرتب سازی رابطه (A-4) به رابطه (A-5) می‌رسیم:

مراجع

- [1] O. J. M. Smith, "Closer control of loops with dead time", Chemical engineering progress, 53, 217-219, (1957).
- [2] M. Shirvani, M. Inagaki and T. Shimizu. "A Simplification Study on Dynamic Model of Distributed Parameter System", AIChE J., Vol. 41, (1995).
- [3] M. Shirvani, M. Inagaki and T. Shimizu. "A simplified Model of Distributed Parameter System", Int. J. Eng., Vol. 6. No. 2, (1993).
- [4] M. Shirvani, M. A. Dustary, M. Shahbaz, Z. Eksiri. "Heuristic Process Model Simplification in Frequency Response Domain", Int. J. of Eng., Vol. 17, No.1, part B, pp. 19-39, (2004).
- [5] S. Ramanathan, R. L. Curl, C. Kravaris, "Dynamic and Control of Quasirational System", AIChE J., Vol. 55, (1989).
- [6] C. K. Santanon, J. Koerner, "Transfer Function System as a Ratio of Two Polynomials", Automatic Control, (1963).